07/10/2019

→ Παραδείγματα

(1) $z = x + 2y$, $x, y \in \mathbb{R}$ (⟶ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)
$f(x,y) \in \mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}$

Αυτή η εξίσωση (1) περιγράφει ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$, δηλ. το σύνολο
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ z = x+2y\}$
$= \{x, y, \underbrace{f(x,y)}_{=x+2y}, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \in \mathbb{R}^2$

Είναι το γράφημα της συνάρτησης
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + 2y$

Η f είναι μια <u>πραγματική</u> συνάρτηση (δηλ. έχει τιμές στον $\mathbb{R}$) δύο (ανεξάρτητων) <u>πραγματικών μεταβλητών</u>.

<u>Παρατήρηση:</u> Στον Α.Λ. ΙΙΙ τέτοιες συναρτήσεις είναι η απλούστερη περίπτωση πραγμ. συναρτ. <u>περισσότερων</u> (από τη μια) πραγματική μεταβλητή

$\boxed{\text{SOS}}$ Οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν το πρότυπο για γενικότερες πραγμ. συναρτήσεις n (ανεξ. πραγμ.) μεταβλητών $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}$

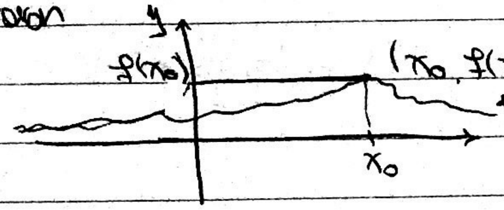
όπου $\bar{x} \in U \in \mathbb{R}^n$ (και όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$).

Πρέπει να «καταλάβουμε» τις συναρτήσεις για $\boxed{n=2}$, $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$
όπου συνήθως $x_1 = x$, $x_2 = y$.
για $(x_1, x_2) \in U \in \mathbb{R}^2$

Πίσω στο παράδειγμα: $f(x,y) = x + 2y$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
Τι συμβαίνει αν θέλω να περιγράψω αυτή τη συνάρτηση γραφικά;

Σχολείο / 1ο έτος: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ ανεξ. μεταβλ., $f(x) = y \in \mathbb{R}$ εξαρτ. μετ.

γραφική παράσταση



$\Gamma_f = \{x, \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}}) : \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}^2$

Εδώ: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ή γενικότερα $f: U \to \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}^n$

Δηλ. $\forall\, \underbrace{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)}_{\text{διάνυσμα στον } \mathbb{R}^n} \in U \in \mathbb{R}^n$ $\exists!$ $\underbrace{f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}}_{\text{πραγματική τιμή της } f}$ [Το $f(U) = \{f(\bar{x}) : \bar{x} \in U\} \subset \mathbb{R}$ είναι η εικόνα της f]

με συντεταγμένες $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$

[Το $\bar{x} \in U$ είναι το όρισμα (argument) της f, το U πεδίο ορισμού της]

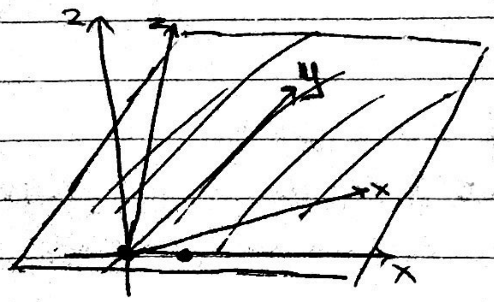
Το γράφημα της f είναι $\Gamma_f = \{\underbrace{(\underbrace{\bar{x}}_{\in \mathbb{R}^n}, \underbrace{f(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}})}_{\in \mathbb{R}^{n+1}} : \bar{x} \in \underbrace{U}_{\mathbb{R}^n}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

ΣΟΣ Γραφική Παράσταση,

στον $\mathbb{R}^{n+1}$ μπορώ να κάνω με την κλασική έννοια μόνο για $n=2$.

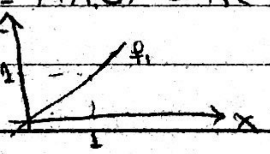
[και μάλιστα ακριβής γραφική παράσταση για $n=2$ μπορεί να γίνει μόνο ως «μακέτα» στον $\mathbb{R}^3$].

Στο παράδειγμα για $n=2$ $\underbrace{f(x,y)}_{=z} = x + 2y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

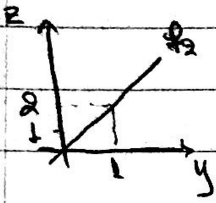


$\to f_1(x) = f(x, 0) = x \in \mathbb{R}$

$\boxed{y=0}$



$f_2(y) = f(0,y) = 2y$, $y \in \mathbb{R}$



Επί τη ευκαιρία (θα τα δούμε αργότερα πιο «επίσημα»).

Η $f(x,y) = x + 2y$, έχει στο σημείο $(0,0)$ τη μερική παράγωγο (partial) ως προς x $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$= f_1'(x)$ όπου $f_1(x) = f(x, \underset{y_0}{\underset{\shortparallel}{0}})$ και τη μερική παράγωγο ως προς y

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f_2'(y)$, όπου $f_2(y) := f(\underset{x_0}{\underset{\shortparallel}{0}}, y)$

Το διάνυσμα στο σημείο $(x_0, y_0) = (0,0)$

$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)}$ $\in \mathbb{R}^2$ ονομάζεται κλίση (ή βαθμίδα, gradient)

της f στο $(0,0)$.

$=: \text{grad}\, f(0,0) =: \nabla f(0,0)$ όπου $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ είναι το

ανάδελτα (nabla = «άρπα» στα εβραϊκά)

$\boxed{\text{SOS}}$! Προσοχή το ανάδελτα ∇ είναι ένα σύμβολο (τελεστής) που χρησιμ. όχι μόνο για το grad.

Άσκηση: Εξετάστε (δηλ. περιγράψτε, όπως μπορείτε, «δείτε» κάποια γραφική παράσταση) τις συναρτήσεις (1) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{για } y=0 \text{ ή } x=0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

και σκεφτείτε σε ποια σημεία αυτός μπορεί να είναι «συνεχής».